ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2001, том 380, № 6, с. 731–735

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.5

РАВНОМЕРНАЯ РАВНОСХОДИМОСТЬ РЯДА ФУРЬЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА ФУРЬЕ

© 2001 г. В. А. Винокуров, академик В. А. Садовничий

Поступило 31.05.2001 г.

В данной работе на основе равномерной асимптотики собственных функций первой краевой задачи, полученной в наших предыдущих работах [1, 2], показано, что сходимость ряда Фурье по собственным функциям первой краевой задачи не зависит от поведения потенциала. А именно, разность частных сумм рядов Фурье по собственным функциям возмущенной и невозмущенной краевых задач равномерно на всем отрезке стремится к нулю при возрастании номера частной суммы (теорема 1).

1. Следуя Ф. Аткинсону [3, гл. 12], перейдем от классической формы первой краевой задачи, состоящей из дифференциального уравнения $y'' + (\lambda + q(x))y = 0$ на отрезке $[0, \pi]$ и краевых условий $y(0) = 0$ и $y(\pi) = 0$ на концах отрезка, к обобщенной краевой задаче, состоящей из интегрального уравнения

$$z(x) = x - \int_0^\pi \nu(x-t)z(t)dx(\sigma(t) + \lambda t) \in [0, \pi], \quad (1)$$

и краевого условия

$$z(\pi) = 0. \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) функция

$$\nu(\xi) \equiv \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ \xi, & \xi \geq 0, \end{cases}$$

$\sigma(x)$ – заданная вещественная функция ограниченной вариации, $z(t)$ – искомая непрерывная функция и $\lambda \in \mathbf{C}$ – искомое число. Если функция $q(x)$ непрерывна и вещественна и $\sigma(x) \equiv \int_0^x q(\xi)d\xi$, то каждое непрерывное решение краевой задачи (1), (2) является собственной функцией классической краевой задачи, имеющей вторую непрерывную производную, и, наоборот, каждая классическая собственная функция $y(x)$ первой краевой задачи, нормированная условием $y'(0) = 1$, является и решением краевой задачи (1), (2) при том же значении числа λ. Здесь мы рассматриваем обобщенную краевую задачу (1), (2).

Введем следующие классы вещественных функций, определенных на сегменте $[0, \pi]$: банахово пространство $C[0, \pi]$ непрерывных функций $y(x)$ с нормой $\|y\|_c \equiv \sup_{x \in [0, \pi]} |y(x)|$; банахово пространство $L_p[0, \pi]$, $p \in [1, \infty[$ суммируемых по Лебегу в p-й степени функций $q(x)$ с нормой $\|q\|_p \equiv \left(\int_0^\pi |q(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$; линейное пространство $BV[0, \pi]$ функций ограниченной вариации $\sigma(x)$ с преднормой $\|\sigma\|_v$, равной полной вариации функции $\sigma(x)$ на $[0, \pi]$; линейное подпространство $BV_c[0, \pi] \subset BV[0, \pi]$, состоящее из всех функций ограниченной вариации $\sigma(x)$, которые непрерывны справа в любой точке $x \in [0, \pi]$ и непрерывны в точках $x = 0$ и $x = \pi$.

В случае $\sigma(x) \in BV_c[0, \pi]$ Аткинсон [3, гл. 12] показал, что при любом $BV_c[0, \pi]$ все собственные значения краевой задачи (1), (2) образуют последовательность вещественных чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, $n \in \mathbf{N}$, неограниченно возрастающую к бесконечности, каждое собственное значение λ_n имеет кратность 1 и соответствующая последовательность нормированных в $L_2[0, \pi]$ непрерывных собственных функций $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ образует полную ортонормированную систему в $L_2[0, \pi]$. Всюду далее в тексте предполагается, что $\sigma \in BV_c[0, \pi]$. В частном случае невозмущенной краевой задачи, т.е. когда $\sigma(x) \equiv 0$ на $[0, \pi]$, собственные значения и собственные функции известны и мы обозначаем их через $\lambda_{n,0} \equiv n^2$ и $y_{n,0}(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)$, $n \in \mathbf{N}$ соответственно. Цель данного

Московский государственный университет дизайна и технологии

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

сообщения – доказательство равносходимости рядов Фурье по двум полным ортонормированным системам функций $\{y_{n,0}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть функция $f \in L_1[0, \pi]$, тогда для нее определены коэффициенты Фурье

$$f_n \equiv \int_0^{\pi} f(x)y_n(x)dx, \quad f_{n,0} \equiv \int_0^{\pi} f(x)y_{n,0}(x)dx$$

и частные суммы

$$S_m(f, x) \equiv \sum_{n=1}^{m} f_n y_n(x), \quad S_{m,0}(f, x) \equiv \sum_{n=1}^{m} f_{n,0} y_{n,0}(x)$$

двух рядов Фурье. Так как собственные функции $y_n(x)$ и $y_{n,0}(x)$ непрерывны, то и частные суммы $S_m(f, x)$ и $S_{m,0}(f, x)$ – непрерывные на $[0, \pi]$ функции. Справедлива следующая теорема о равносходимости рядов Фурье.

Теорема 1. *Для любой функции $\sigma \in BV_c[0, \pi]$ и любой функции $f \in L_1[0, \pi]$ предел*

$$\lim_{m\to\infty} \|S_m(f, x) - S_{m,0}(f, x)\|_c = 0. \tag{3}$$

Функцию $f \in L_1[0, \pi]$ продолжим нечетно на интервал $]-\pi, 0[$, положив $f(x) = -f(-x)$ при $x \in]-\pi, 0[$ и затем определенную таким образом на $]-\pi, \pi]$ функцию продолжим до 2π-периодической функции $\bar{f}(x)$, определенной на всей вещественной прямой $\mathbf{R}$. Для так построенной 2π-периодической функции $\bar{f}(x)$ ее тригонометрическая сумма Фурье

$$S_{m,t}(\bar{f}, x) \equiv \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(\xi)\sin(n\xi)d\xi\right)\sin(nx) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\xi)\sin(n\xi)d\xi\right)\sin(nx) = \tag{4}$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \left(\int_{0}^{\pi} f(\xi)y_{n,0}(\xi)d\xi\right) y_{n,0}(x)$$

и на сегменте $[0, \pi]$ совпадает с суммой Фурье $S_{m,0}(f, x)$, т.е.

$$\forall x \in [0, \pi] \quad S_{m,t}(\bar{f}, x) = S_{m,0}(f, x). \tag{5}$$

Из равенства (5) и теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Для любой функции $BV_c[0, \pi]$ и любой функции $f \in L_1[0, \pi]$ предел*

$$\lim_{m\to\infty} \|S_m(f, x) - S_{m,t}(\bar{f}, x)\|_c = 0. \tag{6}$$

Соотношение (6) сводит вопрос о сходимости рядов по собственным функциям первой краевой задачи к соответствующим вопросам сходимости тригонометрического ряда Фурье. Отсюда, в частности, следует, что неулучшаемое достаточное условие равномерное сходимости ряда Фурье функции $f \in C[0, \pi]$ в терминах модуля непрерывности $\omega(\delta)$ функции $f(x)$ есть соотношение $\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta)\ln(\delta) = 0$ при выполнении необходимого условия равномерной сходимости $f(0) = f(\pi) = 0$ (см. [4, теорема 10.3 и гл. 8, § 2]).

2. К истории вопроса. Для случая классической первой краевой задачи с непрерывно дифференцируемой функцией $q(x)$ теорема 1 имеется в книге [5, теорема 9.1]. Равносходимость спектрального разложения на компактах, лежащих внутри интервала $]0, \pi[$, для функции $q(x) \in L_1[0, \pi]$ при различном виде краевых условий доказана В.А. Ильиным (см. 6, 7]). В.В. Жиковым в работе [8] получена асимптотика собственных функций с ошибкой $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ для обобщенного потенциала и краевых условий вида $y'(0) + hy(0) = 0$ и $y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$, $h \in \mathbf{R}$, $H \in \mathbf{R}$ и сделано на основании этого замечания о равносходимости [8, с. 971]. К сожалению, ввиду наличия арифметических ошибок при вычислении асимптотики собственных значений использование этой работы затруднено.

3. Равномерная сходимость частных сумм $S_m(y_n, x)$ и $S_{m,0}(y_n, x)$. По построению частной суммы $S_m(f, x)$ ряда Фурье по ортонормированной системе $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ верно следующее

Утверждение 1. *Для любого номера $n \in \mathbf{N}$ верно*

$$\lim_{m\to\infty} \|y_n(x) - S_m(y_n, x)\|_c = 0. \tag{7}$$

В самом деле, при $m \geq n$ верно $S_m(y_n, x) = y_n(x)$.

Утверждение 2. *Для любого номера $n \in \mathbf{N}$ верно*

$$\lim_{m\to\infty} \|y_n(x) - S_{m,0}(y_n, x)\|_c = 0. \tag{8}$$

Доказательство утверждения 2. Если функция $z_n(x) \in C[0, \pi]$ есть решение интегрального уравнения (1), то она удовлетворяет на сегменте $[0, \pi]$ условию Липшица. Нормированная функция $y_n(x) = \dfrac{z_n(x)}{\|z_n\|_2}$ также удовлетворяет условию Липшица на сегменте $[0, \pi]$. Так как функция $y_n(x)$ обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = \pi$, то ее нечетное 2π-периодическое продолжение $\bar{y}_n(x)$ есть функция, удовлетворяющая условию Липшица на всей действительной прямой $\mathbf{R}$. По признаку Дини–Липшица частные суммы тригонометрического ряда Фурье $S_{m,t}(\bar{y}_n, x)$ сходятся равномерно к функции $\bar{y}_n(x)$ на $[-\pi, \pi]$. Но при $x \in [0, \pi]$ верно $\bar{y}_n(x) = y_n(x)$ и $S_{m,t}(\bar{y}_n, x) = S_{m,0}(y_n, x)$.

Введем линейное подпространство непрерывных функций $\mathrm{Lin}(\sigma) \subset C[0, \pi]$, состоящее из всех конечных линейных комбинаций собственных функций y_n, $n \in \mathbf{N}$. Введем отображение B_m: $L_1[0, \pi] \to C[0, \pi]$, $m \in \mathbf{N}$, сопоставляющее каждой суммируемой функции $f \in L_1[0, \pi]$ разность двух сумм Фурье

$$B_m(f) \equiv S_m(f, x) - S_{m,0}(f, x). \tag{9}$$

Отображение B_m, $m \in \mathbf{N}$, по построению линейно.

Из утверждений 1 и 2 вытекает справедливость леммы.

Лемма 1. *Для всякой функции* $f \in L_1[0, \pi]$ *верно*

$$\lim_{m \to \infty} \|B_m(f)\|_c = 0. \tag{10}$$

4. Приближенные формулы для собственных функций. При данной функции $\sigma \in BV_c[0, \pi]$ определим при каждом номере $n \in \mathbf{N}$ функцию

$$v_n(x) \equiv \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx)\left[\pi\int_0^x (1 - \cos(2n\xi))d\sigma(\xi) - x\int_0^\pi (1 - \cos(2n\xi))d\sigma(\xi)\right] - \sin(nx)\left[\int_0^\pi \xi\sin(2n\xi)d\sigma(\xi) - \pi\int_x^\pi \sin(2n\xi)d\sigma(\xi)\right]. \tag{11}$$

Каждая функция $v_n(x)$ определена и непрерывна на $[0, \pi]$ и удовлетворяет краевым условиям $v_n(0) = v_n(\pi) = 0$. Введем функцию

$$w_n(x) \equiv n^2\left[y_n(x) - \left(y_{n,0}(x) + \frac{1}{n}v_n(x)\right)\right]. \tag{12}$$

Она также непрерывна на $[0, \pi]$ и удовлетворяет краевым условиям $w_n(0) = w_n(\pi) = 0$.

В нашей предыдущей работе [1, теорема 2] установлена справедливость неравенства

$$\|w_n\|_c \le n^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4.1b + 256.5b^2)}{\left(n\pi - \frac{1}{4}\right)^2} \tag{13}$$

при $n \ge \frac{1}{\pi}\left(125b + \frac{1}{4}\right)$, где $b \equiv \pi\|\sigma\|_v$. Из неравенства (13) следует, что существует число $C_1 > 0$, что верно утверждение

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \|w_n\|_c \le C_1. \tag{14}$$

Из определяющей формулы (11) для функции $v_n(x)$ вытекает неравенство

$$\|v_n\|_c \le 3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\|\sigma\|_v. \tag{15}$$

Для функции $y_{n,0}(x)$ верно неравенство

$$\|y_{n,0}\|_c \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{16}$$

Из неравенств (14)–(16) вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 2. Для любой функции $\sigma \in BV_c[0, \pi]$ существует число $A > 0$, что для любого номера $n \in \mathbf{N}$ для функций $y_{n,0}(x)$, $v_n(x)$, $w_n(x)$ верны неравенства

$$\|y_{n,0}\|_c \le A, \quad \|v_n\|_c \le A, \quad \|w_n\|_c \le A \tag{17}$$

и при $x \in [0, \pi]$ *справедливо представление вида*

$$y_n(x) = y_{n,0}(x) + \frac{1}{n}v_n(x) + \frac{1}{n^2}w_n(x). \tag{18}$$

5. Оценки некоторых тригонометрических сумм. Известна следующая оценка сумм $\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin(nx)}{n}$.

Утверждение 3 [9, упражнение 1.4]. *Для любого номера* $n \in \mathbf{N}$ *и любого числа* $x \in \mathbf{R}$ *верно неравенство*

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin(nx)}{n}\right| \le (\pi + 1). \tag{19}$$

Лемма 3. *Для любого числа* $m \in \mathbf{N}$ *и любых вещественных чисел* α, β, γ *справедливы неравенства*

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin(n\alpha)\cos(n\beta)}{n}\right| \le (\pi + 1), \tag{20}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin(n\alpha)\cos(n\beta)\cos(n\gamma)}{n}\right| \le (\pi + 1), \tag{21}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin(n\alpha)\sin(n\beta)\sin(n\gamma)}{n}\right| \le (\pi + 1). \tag{22}$$

Справедливость леммы 3 вытекает из неравенства (19) и тригонометрических тождеств, выражающих произведения тригонометрических функций через суммы.

6. Оценки нормы операторов B_m. Согласно определяющей формуле (9), для линей-

ного отображения B_m: $L_1[0, \pi] \to C[0, \pi]$ справедливо интегральное представление

$$B_m(f)(x) = \tag{23}$$
$$= \sum_{n=1}^{m} \int_0^{\pi} y_n(t) f(t) dt\, y_n(x) - \int_0^{\pi} y_{n,0}(t) f(t) dt\, y_{n,0}(x) \ .$$

Ядро интегрального оператора B_m

$$k_m(x, t) \equiv \sum_{n=1}^{m} (y_n(t) y_n(x) - y_{n,0}(t) y_{n,0}(x)) \tag{24}$$

является непрерывной в квадрате $[0, \pi] \times [0, \pi]$ функцией.

Т е о р е м а 2. *Для любой функции* $\sigma \in BV_c[0, \pi]$ *существует число* $C > 0$, *что для любого* $m \in \mathbf{N}$ *и любых* $x \in [0, \pi]$ *и* $t \in [0, \pi]$ *верно неравенство*

$$|k_m(x, t)| \le C. \tag{25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Согласно лемме 2, функция $k_m(x, t)$ может быть записана в виде

$$k_m(x, t) = \sum_{n=1}^{m} \quad y_{n,0}(t) + \frac{1}{n} v_n(t) + \frac{1}{n^2} w_n(t) \quad \times \tag{26}$$
$$\times \quad y_{n,0}(x) + \frac{1}{n} v_n(x) + \frac{1}{n^2} w_n(x) \quad - y_{n,0}(t) y_{n,0}(x) \ .$$

Отсюда

$$k_m(x, t) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} y_{n,0}(t) v_n(x) + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} y_{n,0}(x) v_n(t) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} (y_{n,0}(t) w_n(x) + v_n(t) v_n(x) + w_n(t) y_{n,0}(x)) + \tag{27}$$
$$+ \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^3} (v_n(t) w_n(x) + w_n(t) v_n(x)) + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^4} w_n(t) w_n(x).$$

В силу леммы 2 справедливы неравенства

$$\left| \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} (y_{n,0}(t) w_n(x) + v_n(t) v_n(x) + w_n(t) y_{n,0}(x)) \right| \le \tag{28}$$
$$\le 3A^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le 6A^2,$$

$$\left| \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^3} (v_n(t) w_n(x) + w_n(t) v_n(x)) \right| \le \tag{29}$$
$$\le 2A^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \le 4A^2,$$

$$\left| \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^4} w_n(t) w_n(x) \right| \le A^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \le 2A^2. \tag{30}$$

ибо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le 2.$

Рассмотрим сумму

$$Q_m(x, t) \equiv \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} y_{n,0}(t) v_n(x). \tag{31}$$

Используя определяющую формулу (11) для функции $v_n(x)$, сумму (31) запишем в виде

$$Q_m(x, t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \ \sin(nt) \cos(nx) \times$$
$$\times \left[\pi \int_0^x (1 - \cos(2n\xi)) d\sigma(\xi) - \right. \tag{32}$$
$$\left. - x \int_0^{\pi} (1 - \cos(2n\xi)) d\sigma(\xi) \right] - \sin(nt) \sin(nx) \times$$
$$\times \left[\int_0^{\pi} \xi \sin(2n\xi) d\sigma(\xi) - \pi \int_x^{\pi} \sin(2n\xi) d\sigma(\xi) \right] \ .$$

Отсюда

$$Q_m(x, t) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\sin(nt)\cos(nx)}{n} \times$$
$$\times \ \frac{1}{\pi} \int_0^x d\sigma(\xi) - \frac{x}{\pi^2} \int_0^{\pi} d\sigma(\xi) \ -$$
$$- \frac{1}{\pi} \int_0^x \sum_{n=1}^{m} \frac{\sin(nt)\cos(nx)\cos(2n\xi)}{n} d\sigma(\xi) + \tag{33}$$
$$+ \frac{x}{\pi^2} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{m} \frac{\sin(nt)\cos(nx)\cos(2n\xi)}{n} d\sigma(\xi) -$$
$$- \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{m} \frac{\sin(nt)\sin(nx)\sin(2n\xi)}{n} \xi d\sigma(\xi) +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \int_x^{\pi} \sum_{n=1}^{m} \frac{\sin(nt)\sin(nx)\sin(2n\xi)}{n} d\sigma(\xi).$$

Применяя лемму 3 и оценивая интегралы в (33) по модулю, получаем неравенство

$$|Q_m(x, t)| \le (\pi + 1)\frac{2\|\sigma\|_V}{\pi} + 4(\pi + 1)\frac{1}{\pi}\|\sigma\|_V = 6\frac{(\pi + 1)}{\pi}\|\sigma\|_V. \quad (34)$$

Из неравенств (28)–(30), неравенства (34) и представления (27) получаем неравенство

$$|k_m(x, t)| \le 12\frac{(\pi + 1)}{\pi}\|\sigma\|_V + 12A^2, \quad (35)$$

доказывающее теорему 2 с константой $C \equiv 12\left(\frac{\pi + 1}{\pi}\|\sigma\|_V + A^2\right)$.

7. Доказательство теоремы 1. Из теоремы 2 следует, что нормы линейных отображений B_m, $m \in \mathbf{N}$, ограничены в совокупности константой C. Так как система нормированных собственных функций $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2[0, \pi]$ при любой функции $\sigma \in BV_c[0, \pi]$ (см. 3, теорема 12.10.2]), то линейное подпространство $\mathrm{Lin}(\sigma)$ конечных линейных комбинаций собственных функций всюду плотно в гильбертовом пространстве $L_2[0, \pi]$, а следовательно, и в банаховом пространстве $L_1[0, \pi]$. Из леммы 1 и теоремы Банаха–Штейнхауза [10, с. 271] тогда вытекает, что

$$\lim_{m \to \infty}\|B_m(f)\|_c = 0$$

для любого элемента $f \in L_1[0, \pi]$.

Теорема 1 доказана.

Изложение представленных здесь результатов смотрите в Интернете по адресу "http://vinokur.narod.ru/equicon".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Винокуров В.А., Садовничий В.А.* // ДАН. 2001. Т. 376. № 4. С. 444–448.
2. *Винокуров В.А., Садовничий В.А.* // Изв. АН. Сер. мат. 2000. Т. 64. № 4. С. 47–108.
3. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1968. Т. 1.
5. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
6. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 3. С. 371–379.
7. *Ильин В.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. М.: Наука, 1991.
8. *Жиков В.В.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31. С. 965–976.
9. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. М.: Мир, 1985. Т. 1.
10. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.